**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**

**ΤΡΙΤΗ 03/06/2025**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΟΜΑΔΑ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ «ΕΞΕΛΙΞΗ»

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 93

**Α2.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 16

**Α3.**

**α.** Λ

**β.** Σ

**γ.** Σ

**δ.** Σ

**ε.** Λ

**Α4.**

**α.** $(c)' = 0$

**β.** $(x^2)' = 2x$

**ΘΕΜΑ Β**

**Β1.**

Χ «πλήθος ωρών υπερωριακής εργασίας»

$\nu = 50$

| Πλήθος ωρών $x_i$ | Συχνότητα $\nu_i$ | Σχετική συχνότητα $f_i$ % | Αθροιστική συχνότητα $N_i$ | $x_i\nu_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 10 | 20 | 10 | 0 |
| 1 | 15 | 30 | 25 | 15 |
| 2 | 11 | 22 | 36 | 22 |
| 3 | 8 | 16 | 44 | 24 |
| 4 | 6 | 12 | 50 | 24 |
| Σύνολο | 50 | 100 | | 85 |

Ξέρουμε ότι $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 \Leftrightarrow \nu_1 + 15 + 11 + 8 + 6 = 50 \Leftrightarrow \nu_1 = 10$

<u>1η γραμμή:</u>

$\nu_1 = 10$ $\quad f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{10}{50} = \frac{20}{100}$ $\quad N_1 = \nu_1 = 10$ $\quad f_1\ \% = 20\%$

<u>2η γραμμή:</u>

$\nu_2 = 15$ $\quad f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} = \frac{15}{50} = \frac{30}{100}$ $\quad N_2 = \nu_1 + \nu_2 = 25$ $\quad f_2\ \% = 30\%$

<u>3η γραμμή:</u>

$\nu_3 = 11$ $\quad f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} = \frac{11}{50} = \frac{22}{100}$ $\quad N_3 = N_2 + \nu_3 = 36$ $\quad f_3\ \% = 22\%$

<u>4η γραμμή:</u>

$\nu_4 = 8$ $\quad f_4 = \frac{\nu_4}{\nu} = \frac{8}{50} = \frac{16}{100}$ $\quad N_4 = N_3 + \nu_4 = 44$ $\quad f_4\ \% = 16\%$

5η γραμμή:

$v_5 = 6$ $\quad f_5 = \frac{v_5}{v} = \frac{6}{50} = \frac{12}{100}$ $\quad N_5 = N_4 + v_5 = 50$ $\quad f_5\,\% = 12\%$

**Β2.**

Είναι $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i v_i}{v} = \frac{85}{50} = \frac{170}{100} = 1{,}7$ ώρες

**Β3.**

Είναι ν = 50, άρα $\frac{\nu}{2} = 25$.

Οπότε η δ $= \frac{t_{25} + t_{26}}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$

$t_{25} = 1$, αφού $N_2 = 25$ και $t_{26} = 2$

**Β4.**

**α)** Ζητώ ποσοστό ώστε $X \le 3 \Leftrightarrow X = 0$ ή $X = 1$ ή $X = 2$ ή $X = 3$, άρα

$$p_z = f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 88\%$$

**β)** Θα έχουμε νέες τιμές τέτοιες ώστε $y_i = x_i + 4$, $\quad i = 1, \ldots, 50$.

Τότε από βασική εφαρμογή του σχολικού βιβλίου σελ. 99 θα έχουμε:

$$\bar{y} = \bar{x} + 4, \text{ άρα } \bar{y} = 1{,}7 + 4 = 5{,}7 \text{ ώρες υπερωρίας}$$

**ΘΕΜΑ Γ**

Είναι $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + α$

**Γ1.**

Είναι $A_f = \mathbb{R}$, ως πολυωνυμική.

Με $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = -6x^2 + 12x$.

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow -6x(x-2) = 0 \Leftrightarrow -6x = 0$ ή $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$.

Το πρόσημο της f΄ δίνει τη μονοτονία της f και φαίνεται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών.

| x | $-\infty$ | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | |
| f | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Αφού $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$.

Και αφού $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 2)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$.

**Γ2.**

Η f εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 0$, το $f(0) = α$

Η f εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 2$, το $f(2) = 8 + α$

$f(2) = -2(2)^3 + 6(2)^2 + α = -16 + 24 + α = 8 + α$.

Αφού το ημιάθροισμα των τιμών των ακροτάτων είναι ίσο με $-8$, τότε:

$$\frac{f(2) + f(0)}{2} = -8 \Leftrightarrow f(2) + f(0) = -16 \Leftrightarrow 8 + α + α = -16 \Leftrightarrow α = -12$$

**Γ3.**

Για α = –12, είναι $f(x) = -2 \cdot x^3 + 6x^2 - 12$, $f'(x) = -6x^2 + 12x$, $x \in \mathbb{R}$

Είναι Μ(1, f(1)), όπου $f(1) = -2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 12 = -8$.

Και $f'(1) = -6 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 = 6$.

Έστω (ζ): y = λx + β, η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο Μ(1, –8).

Θα είναι $\lambda = f'(1) = 6$, οπότε:

(ζ): y = 6x + β και αφού το σημείο Μ(1, –8) ανήκει στην ευθεία, οι συντεταγμένες του, θα επαληθεύουν την εξίσωσή της, οπότε :

$$-8 = 6 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow 6 + \beta = -8 \Leftrightarrow \beta = -14$$

Τελικά, η ζητούμενη εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας είναι η (ζ): y = 6x – 14

**Γ4.**

Με $x \geq 2$, η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε ισχύει:

$x \geq 2 \Leftrightarrow f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4 \Leftrightarrow -2(x^3 - 3x^2 + 6) \leq -4 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 6 \geq 2$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$.

**ΘΕΜΑ Δ**

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3}$

**Δ1.**

Είναι $A_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = (\frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3})' = \frac{1}{3}3x^2 + 2\lambda x + 7$

$f'(x) = x^2 + 2\lambda x + 7$

Αφού $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0 \overset{\text{ορισμός}}{\Leftrightarrow} f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 + 2\lambda + 7 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -8 \Leftrightarrow \lambda = -4$

**Δ2.**

Για $\lambda = -4$ θα είναι:

$f'(x) = x^2 - 8x + 7,\ x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ ή $x_2 = 7$

Το πρόσημο της f΄ δίνει τη μονοτονία της f και φαίνεται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών.

| x | -∞ | | 1 | | 7 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | | + | 0 | − | 0 | + | |
| f | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και $[7, +\infty)$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 7)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 7]$.

**Δ3.**

Είναι $x_1 = \dfrac{3}{2}$, το $x_2 = \dfrac{5}{2}$ και $x_1, x_2 \in [1, 7]$ με $x_1 < x_2$ και αφού f γνησίως φθίνουσα στο $[1, 7]$,

θα είναι:

$$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) > 0$$

και

$x_3 = 2020$ το $x_4 = 2025$ και $x_3, x_4 \in [7, +\infty)$ με $x_3 < x_4$, και αφού f είναι γνησίως αύξουσα στο $[7, +\infty)$ θα είναι: $f(x_3) < f(x_4)$, δηλαδή

$$f(2020) < f(2025) \Leftrightarrow f(2020) - f(2025) < 0 \Leftrightarrow f(2025) - f(2020) > 0$$

οπότε $A = \dfrac{f(2025) - f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right)} > 0$

**Δ4.**

$$\lim_{x\to 2}\frac{f'(x)-f''(x)+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-8x+7-(2x-8)+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-8x+7-2x+8+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x^2-10x+16}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{3})(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}$$

$$\lim_{x\to 2}(\sqrt{x+1}-\sqrt{3})=0$$

$$\lim_{x\to 2}(x^2-10x+16)=0$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{\sqrt{x+1}^2-\sqrt{3}^2}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{x+1-3}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x-8)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}) = -6(\sqrt{3}+\sqrt{3}) = -6\cdot 2\cdot\sqrt{3} = -12\sqrt{3}$$


**ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΕΠΑ.Λ**
Κεντρικό Διδακτήριο: Βασ. Αμαλίας 1 & Μιλτιάδου, Πλατεία ΗΣΑΠ Αμαρουσίου, 151 22 Μαρούσι
τηλ.-fax: 210 8028560, 210 6129412 • www.exelixi.edu.gr • info@ekpedefsi.gr