

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ &  
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡ/ΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΟΜΑΔΑ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ «ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ»

**ΘΕΜΑ Α**

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίο σελ. 186

A2. Θεωρία σχολικού βιβλίο σελ. 76

A3. Θεωρία σχολικού βιβλίο σελ. 161

A4. α) Σ      β) Σ      γ) Λ      δ) Λ      ε) Σ

**ΘΕΜΑ Β**

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x^3 + ax^2 + 9x - 3$

B1. Είναι  $D_f = \mathbb{R}$  και η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως πολυωνυμική

με  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$

Αφού η  $f$  εμφανίζει ακρότατο στο σημείο  $x_0 = 1$ , εσωτερικό του  $\mathbb{R}$ ,  
τότε από θεώρημα Fermat,  $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + 9 = 0 \Leftrightarrow a = -6$ .

B2.

Για  $a = -6$ ,  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$  και  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ .

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$  ή  $x_2 = 3$

Το πρόσημο της  $f'$  δίνει τη μονοτονία της  $f$  και φαίνεται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών



x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+
f	↗		↘		↗

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$  και αφού η f είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα και  $[3, +\infty)$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 3)$ , άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[1, 3]$ .

Το σύνολο τιμών της f είναι:

$\Delta_1 = (-\infty, 1]$ , αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $\Delta_1$ ,

τότε  $f(\Delta_1) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1)] = (-\infty, 1]$ , αφού  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$  και  $f(1) = 1$

Αφού  $f(0) = -3$  και  $f(1) = 1$ , από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών στο  $[0, 1]$ , υπάρχει  $x_1 \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε  $f(x_1) = 0$ .

$\Delta_2 = [1, 3]$ , αφού η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta_2$ ,

τότε  $f(\Delta_2) = [f(3), f(1)] = [-3, 1]$ , οπότε από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών στο  $[1, 3]$ , υπάρχει  $x_2 \in (1, 3)$  τέτοιο ώστε  $f(x_2) = 0$ .

$\Delta_3 = [3, +\infty)$ , αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $\Delta_3$ ,

τότε  $f(\Delta_3) = [f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [-3, +\infty)$ , αφού  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ , οπότε

αφού το  $0 \in f(\Delta_3)$ , υπάρχει  $x_3 \in (3, +\infty)$  τέτοιο ώστε  $f(x_3) = 0$ .

Τελικά η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει τρεις θετικές διακεκριμένες ρίζες με  $0 < x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_3$ .

**B3.**

Είναι  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ ,  $x \in \mathbb{R}$

και  $f''(x) = 6x - 12$ .

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	○	+
f	↘		↗



$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$  και  $f$  συνεχής στο  $(-\infty, 2]$ , άρα  $f$  κοίλη στο  $(-\infty, 2]$  και  
 $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$  και  $f$  συνεχής στο  $[2, +\infty)$  άρα  $f$  κυρτή στο  $[2, +\infty)$

Η  $f$  εμφανίζει σημείο καμπής στο  $K(2, f(2))$  ή  $K(2, 1)$ .

**B4.**

Είναι  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$  με  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$  και

$g(x) = x + f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 3$  με  $g'(x) = 3x^2 - 12x + 10$

Έστω  $A(\xi, f(\xi))$  και  $B(\xi, g(\xi))$  ή  $B(\xi, f(\xi) + \xi)$  με  $g'(\xi) = f'(\xi) + 1$ .

Η εξίσωση εφαπτομένης της  $C_f$  στο  $A(\xi, f(\xi))$  είναι η

$(\varepsilon_1) : y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$ , οπότε για  $x=0$ ,  $y = f(\xi) - \xi f'(\xi)$ , άρα το κοινό σημείο της  $(\varepsilon_1)$  με τον  $y'y$  είναι το  $\Lambda(0, f(\xi) - \xi f'(\xi))$ .

Η εξίσωση εφαπτομένης της  $C_g$  στο  $B(\xi, g(\xi))$  είναι η

$(\varepsilon_2) : y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi)$ ,

οπότε για  $x=0$ ,

$y = g(\xi) - \xi g'(\xi) = f(\xi) + \xi - \xi(f'(\xi) + 1) = f(\xi) - \xi f'(\xi)$

άρα το κοινό σημείο της  $(\varepsilon_2)$  με τον  $y'y$  είναι το  $\Lambda(0, f(\xi) - \xi f'(\xi))$ , οπότε η

$(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  τέμνονται στο  $\Lambda$ .

**ΘΕΜΑ Γ**

$$\text{Είναι } f(x) = \begin{cases} e^x \eta \mu x, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

**Γ1.**

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \eta \mu x) = e^0 \cdot \eta \mu 0 = 0$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0$

$f(0) = 0$ .

Αφού  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ , τότε η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \frac{\eta \mu x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = +\infty,$$

αφού  $|x| = x$ , για  $x > 0$   $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ , οπότε η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0=0$ .

**Γ2.**

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Για την ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$ , βρίσκουμε το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \eta \mu x$

$$\text{Αφού } |\eta \mu x| \leq 1 \Leftrightarrow |e^x \cdot \eta \mu x| \leq |e^x| \Leftrightarrow -e^x \leq e^x \cdot \eta \mu x \leq e^x$$

Αφού  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , οπότε από κριτήριο παρεμβολής

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \eta \mu x) = 0$ , οπότε στο  $-\infty$  η γραφική παράσταση της  $f$  έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία  $(\varepsilon_1): y=0$ .

Για την ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1 \in \mathbb{R}$$

Άρα  $\lambda=1$ , οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2+x} - x] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Τελικά, η ευθεία  $(\varepsilon): y = x + \frac{1}{2}$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$

**Γ3.**

Για να βρούμε το σημείο στο οποίο η  $C_f$  τέμνει την  $(\varepsilon): y = x + \frac{1}{2}$  λύνουμε το

$$\text{σύστημα } \begin{cases} y = f(x) \\ y = x + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = e^x \eta \mu x - x - \frac{1}{2}$ , με  $x \in [-\pi, 0]$ .

Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[-\pi, 0]$ , ως πράξεις συνεχών



$$g(-\pi) = e^{-\pi} \eta \mu(-\pi) - (-\pi) - \frac{1}{2} = \pi + \frac{1}{2} > 0$$

$$g(0) = e^0 \eta \mu 0 - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

Αφού  $g(-\pi) \cdot g(0) < 0$ , τότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (-\pi, 0)$ , τέτοιο ώστε  $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \xi + \frac{1}{2}$ , οπότε οι  $C_f, (\varepsilon)$ , έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τετμημένη  $\xi \in (-\pi, 0)$ .

**Γ4.**

Έστω  $M(x, y) \in C_f, x \geq 0$

Είναι  $x=x(t)$  και  $y=y(t)$ , όπου  $x'(t) > 0, t \geq 0$ .

Ζητάμε, αν υπάρχει,  $t_0 \geq 0$ , τέτοιο ώστε  $x'(t_0) = y'(t_0)$ .

Είναι  $y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}} [x^2(t) + x(t)]' = \frac{2x(t) \cdot x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}}$  με  $t > 0$ , διότι για  $t = 0$  η

$y(t) = \sqrt{x^2(t)+x(t)}$  δεν είναι παραγωγίσιμη, όπως προκύπτει από το Γ1.

Θέλουμε  $y'(t) = x'(t) \Leftrightarrow \frac{2x(t) \cdot x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}} = x'(t) \Leftrightarrow 2x(t) + 1 = 2\sqrt{x^2(t) + x(t)}$ , αφού  $x'(t) > 0$

Λύνουμε την εξίσωση  $2x(t) + 1 = 2\sqrt{x^2(t) + x(t)}$  και αφού  $x(t) \geq 0$ , για  $t \geq 0$ , τότε υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο, έχουμε :

$4x^2(t) + 4x(t) + 1 = 4x^2(t) + 4x(t) \Leftrightarrow 1 = 0$  αδύνατο, οπότε δεν υπάρχει  $t_0 \geq 0$ , τέτοιο ώστε  $x'(t_0) = y'(t_0)$ .

**ΘΕΜΑ Δ**

$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , F παράγουσα

$x f(x) = 2F(x) \ln x$ , για  $x > 0$

η εφαπτομένη της  $f$  στο  $M(1, f(1))$  // στην  $(\varepsilon): y = 2x$  άρα  $f'(1) = 2$



**Δ1.**

Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση και πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο  $(0, +\infty)$ :

$$g'(x) = \left( \frac{F(x)}{x^{\ln x}} \right)' = \frac{F'(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot (x^{\ln x})'}{(x^{\ln x})^2} =$$

$$= \frac{f(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot e^{\ln^2 x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot x^{\ln^2 x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{(x^{\ln x})^2} =$$

$$= x^{\ln x} \frac{f(x) - F(x) \cdot \frac{2 \ln x}{x}}{(x^{\ln x})^2} = 0$$

Άρα  $g(x) = c, c \in \mathbb{R}$ .

**Δ2. i)**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$

το όριο προκύπτει της απροσδιόριστης μορφής:  $\left( \frac{0}{0} \right)$ . Εφόσον ο αριθμητής είναι

παραγωγίσιμη συνάρτηση και ο παρονομαστής ομοίως στο  $(0, +\infty)$ , σύμφωνα με τον

κανόνα De L'Hôpital το ζητούμενο όριο θα είναι ισοδύναμο με:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{2}{1} = 2$

αφού η  $f'$  συνεχής ως πράξη συνεχών με:

$$f(x) + xf'(x) = 2f(x) \ln x + \frac{2F(x)}{x}$$

$$xf(x) + x^2 f'(x) = 2f(x) \ln x + \frac{2F(x)}{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2f(x) \ln x + 2F(x) - xf(x)}{x^2}$$

ii)  $x f(x) = 2F(x) \ln x$

$$\text{για } x \neq 1 \Rightarrow F(x) = \frac{xf(x)}{2 \ln x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x)}{2 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\ln x} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

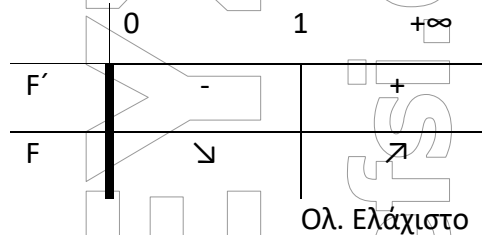
Η  $F$  συνεχής ως παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$ , άρα  $F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = 1$

$$F(x) = x^{\ln x}$$

Δ3.

$$F'(x) = (e^{(\ln x)^2})' = e^{(\ln x)^2} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$



Η  $F \downarrow$  στο  $(0, 1]$  και  $F \uparrow$  στο  $[1, +\infty)$  η εξίσωση γράφεται:

$$F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2$$

Το 1 είναι προφανής λύση

- Για  $0 < x < 1$  είναι

$$0 < x^2 < x \stackrel{F \downarrow}{\Rightarrow} F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0 > -(x-1)^2$$

Αδύνατη.

- Για  $x > 1$  είναι

$$0 < x < x^2 \stackrel{F \uparrow}{\Rightarrow} F(x) < F(x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0 > -(x-1)^2$$

Αδύνατη.

Δ4.

$$E = \int_1^e |f(x)| dx = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e x \ln x dx =$$

Από την βασική ανίσωση:  $e^x \geq x + 1$  ;έχουμε:

$$e^{(\ln x)^2} \geq \ln^2 x + 1$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x=1$ :

$$\begin{aligned} \int_1^e e^{\ln^2 x} dx &> \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx = \\ &= \int_1^e (x)' \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx = \\ &= [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e 2 \ln x dx + e - 1 = \\ &= e - 2 [x \ln x]_1^e + 2(e - 1) + e - 1 = \\ &= e - 2e + 2e - 2 + e - 1 = \\ &= 2e - 3 \end{aligned}$$

### Σχόλιο

Τα θέματα ήταν κλιμακούμενης δυσκολίας για καλά προετοιμασμένους μαθητές.