

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΟΜΑΔΑ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ «ΕΞΕΛΙΞΗ»

**ΘΕΜΑ Α**

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 30

A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 22

A3. α. Λ

β. Σ

γ. Σ

δ. Λ

ε. Σ

**ΘΕΜΑ Β**

$$f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 12x + 10, \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$$

B1. Είναι  $Af = \mathbb{R}$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  η  $f$  είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^3 + \alpha x^2 - 12x + 10)' \\ &= 6x^2 + 2\alpha x - 12 \end{aligned}$$

B2. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο με  $x_0 = 1$ ,

έχει κλίση  $\lambda = f'(1)$  (1)

Δίνεται ότι η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον  $x'x$ , άρα  $\lambda = \varepsilon\varphi 0^\circ = 0$  (2)

Από (1), (2) έχουμε  $f'(1) = 0$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot 1^2 + 2\alpha \cdot 1 - 12 = 0 \Leftrightarrow 6 + 2\alpha - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = 12 - 6$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

Άρα  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 10, \quad x \in \mathbb{R}$

B3. Για  $a=3$ ,  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 10$

και  $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot (x^2 + x - 2) = 0$$

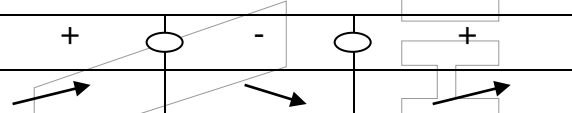
$$\Leftrightarrow 6 \neq 0 \text{ ή } x^2 + x - 2 = 0$$

$$\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -2$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

Το πρόσημο της  $f'(x)$ , δίνει τη μονοτονία της  $f$  και φαίνεται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$
$f$					

είναι  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$  και  $f$  συνεχής, άρα  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, -2], [1, +\infty)$

είναι  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 1)$  και  $f$  συνεχής, άρα  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $[-2, 1]$

Η  $f$  εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο  $x_1 = -2$ , το  $f(-2)=30$  και εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο  $x_2 = 1$ , το  $f(1)=3$

B4. Για  $a=3$ ,

Ζητώ το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 + 6x - 12}{x-1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (6x^2 + 6x - 12) = 0$$

Με  $x$  "κοντά" στο  $x_0 = 1$ , έχουμε:

$$\frac{6x^2 + 6x - 12}{x-1} = \frac{(x-1) \cdot (6x+12)}{(x-1)} = 6x+12$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (6x + 12) = 18$$

Σχήμα Horner με  $\rho=1$

$$\begin{array}{r|l} 6 & 6 & -12 & 1 \\ \downarrow & 6 & 12 & \\ \hline 6 & 12 & 0 & \end{array}$$

### ΘΕΜΑ Γ

Χ "ώρες ενασχόλησης με τα κοινωνικά δίκτυα"

Γ1. Ο πίνακας γίνεται

κλάσεις [ , )	Κεντρική τιμή $x_i$	Συχνότητα $v_i$	$x_i v_i$
[8,12)	10	20	200
[12,16)	14	15	210
[16,20)	18	$v_3$	$18v_3$
[20,24)	22	5	110
	Σύνολο	$40 + v_3$	$520 + 18v_3$

$$\begin{aligned} \text{Δίνεται } \bar{x} = 14 &\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{v} = 14 \Leftrightarrow \frac{520 + 18v_3}{40 + v_3} = 14 \Leftrightarrow 520 + 18v_3 = 14(40 + v_3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 520 + 18v_3 = 560 + 14v_3 \Leftrightarrow 18v_3 - 14v_3 = 560 - 520 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4v_3 = 40 \Leftrightarrow v_3 = 10 \end{aligned}$$

Γ2. Για  $v_3 = 10, v=50$

Κλάσεις [ , )	$x_i$	$v_i$	$x_i v_i$
[8,12)	10	20	200
[12,16)	14	15	210
[16,20)	18	10	180
[20,24)	22	5	110
	Σύνολο	50	700

Γ3. Για  $v_3 = 10, v=50$

Κλάσεις [ , )	$x_i$	$v_i$	$\frac{14}{\parallel}$ $x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
[8,12)	10	20	-4	16	320
[12,16)	14	15	0	0	0
[16,20)	18	10	4	16	160
[20,24)	22	5	8	64	320
	Σύνολο	50			800

$$\Leftrightarrow s^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} \Leftrightarrow s^2 = \frac{800}{50} = 16$$

Γ4. Είναι  $s^2 = 16$ , άρα  $s = +\sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$

άρα  $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} > \frac{1}{10}$ , άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές.

#### ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} > x \neq 0$$

Δ1.  $Af = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Με  $x \neq 0$

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = -(x^{-2})' = -(-2 \cdot x^{-2-1}) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

Είναι  $f'(x) \neq 0, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$\text{και } f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Το πρόσημο της  $f'(x)$  δίνει τη μονοτονία της  $f$  και φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών.

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'$	-		+
$f$	↘		↗

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \text{ και } f \text{ συνεχής άρα } f' \downarrow (-\infty, 0)$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty) \text{ και } f \text{ συνεχής άρα } f' \uparrow (0, +\infty)$$

Δ2. Είναι  $-4 \leq x \leq -1$

$$\text{και } f' \downarrow [-4, -1], \text{ άρα } f(-4) \geq f(x) \geq f(-1) \Leftrightarrow -\frac{1}{16} \geq f(x) \geq -1 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$$

Δ3. Η εξίσωση εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $M(1, f(1))$ .

ή  $M(1, -1)$  και είναι της μορφής  $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ , όπου  $\lambda = f'(1) = 2$

Άρα  $(\varepsilon): y = 2x + \beta$

Είναι  $M(1, -1) \in (\varepsilon)$ , άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της, άρα

$$-1 = 2 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3, \text{ άρα } y = 2x - 3$$

Δ4. Είναι  $A_i(x_i, y_i) \in (\varepsilon)$  με  $\bar{x} = 4$

αφού  $A_i(x_i, y_i) \in (\varepsilon)$  τότε οι συντεταγμένες τους, επαληθεύουν την εξίσωσή της, οπότε

$y_i = 2x_i - 3, i = 1, 2, 3$ , άρα από βασική εφαρμογή σχολικού βιβλίου σελ. 99, έχουμε:

$$\begin{cases} \bar{y} = 2 \cdot \bar{x} - 3 = 5 \\ s_y = |2| \cdot s_x = 4 \end{cases}, \text{ άρα } C_{yy} = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0,8$$