

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ &
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡ/ΚΗΣ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΟΜΑΔΑ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ «ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ»

ΘΕΜΑ Α

A1. Σελ. 111, σχολικό βιβλίο

A2. Σελ. 104, σχολικό βιβλίο

A3. Σελ. 128, σχολικό βιβλίο

A4. α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

$$g(x) = \frac{4 - e^x}{e^x}, x \in \mathbb{R}$$

$$h(x) = \ln x, x > 0$$

$$\mathbf{B1.} D_{g \circ h} = \{x \in D_h \text{ και } h(x) \in D_g\} = \{x > 0 \text{ και } \ln x \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$$

$$\text{Τότε: } (g \circ h)(x) = g(h(x)) = \frac{4 - e^{2 \ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - e^{\ln x^2}}{x} = \frac{4 - x^2}{x}, x > 0$$

B2. i) Για $x > 0$, η $(g \circ h)$ παραγωγίσιμη με:

$$(g \circ h)'(x) = \left(\frac{4 - x^2}{x}\right)' = \frac{(-2x)x - (4 - x^2) \cdot 1}{x^2} = \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} = \frac{-x^2 - 4}{x^2} = -\frac{x^2 + 4}{x^2} < 0$$

και $(g \circ h)$ συνεχής στο $(0, +\infty)$, άρα η $(g \circ h)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.



Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

$$\text{ii) Είναι } e < \pi \Rightarrow f(e) > f(\pi) \Rightarrow \frac{4 - e^2}{e} > \frac{4 - \pi^2}{\pi} \Rightarrow \frac{4 - \pi^2}{e} < \frac{4 - \pi^2}{4 - e^2}$$

B3.

Για την κατακόρυφη ασύμπτωτη:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(4 - x^2) \cdot \frac{1}{x}] = 4(+\infty) = +\infty, \text{ άρα η } x = 0 \text{ είναι κατακόρυφη}$$

ασύμπτωτη.

Πλάγιες – οριζόντιες

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2}{x^2} \right) = -1 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (1x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4 - x^2}{x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4 - x^2 + x^2}{x} \right) = 0 = \beta$$

Άρα $(\epsilon): y = -x$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη.

$$\text{B4. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\chi\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\chi\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{4-x^2}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-x^2+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{-x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0$$

Άρα για $x > 0$, έχουμε:

$$\left| \frac{\chi\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{4-x^2} \right| = \left| \frac{x}{4-x^2} \right| \cdot |\sigma\upsilon\nu(1+x^2)| \leq \left| \frac{x}{4-x^2} \right| \Rightarrow \left| \frac{x}{-x^2+4} \right| \leq \frac{\chi\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{4-x^2} \leq \left| \frac{x}{-x^2+4} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{-x^2+4} \right) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{-x^2+4} \right) = 0$$

$$\text{Άρα από κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\chi\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{4-x^2} = 0$$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\int_2^3 xf(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 x \left(\frac{1}{x} + \alpha \right) dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 (1 + \alpha x) dx = 1 \Leftrightarrow \left[x + \frac{\alpha x^2}{2} \right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow \left(3 + \frac{9\alpha}{2} \right) - (2 + 2\alpha) = 1 \Leftrightarrow$$
$$3 - \frac{9\alpha}{2} - 2 - 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3 & x < 1 \\ \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases}$$

Γ2.

i) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$

$f(1) = 1$ και άρα η f συνεχής στο $x_0 = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{x(x-1)} = -1$$

Άρα $f'(1) = -1$

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f (ϵ): $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$y - 1 = -1(x - 1)$ άρα (ϵ): $y = -x + 2$

και $\lambda = f'(1) = -1$ άρα $\epsilon\phi\omega = -1$ και $\omega = 135^\circ$ (διότι $x \in [0, \pi]$)



Γ3.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3 & x < 1 \\ \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases}$$

Για $x < 1$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x - 3 < 0$

Άρα στο $(-\infty, 1)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Για $x > 1$ η f είναι παραγωγίσιμη ως ρητή συνάρτηση με

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$

Λόγω της συνέχειας η μονοτονία αφορά όλο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$D_f = \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} . Από γνωστή πρόταση η f είναι «1 – 1» στο \mathbb{R}

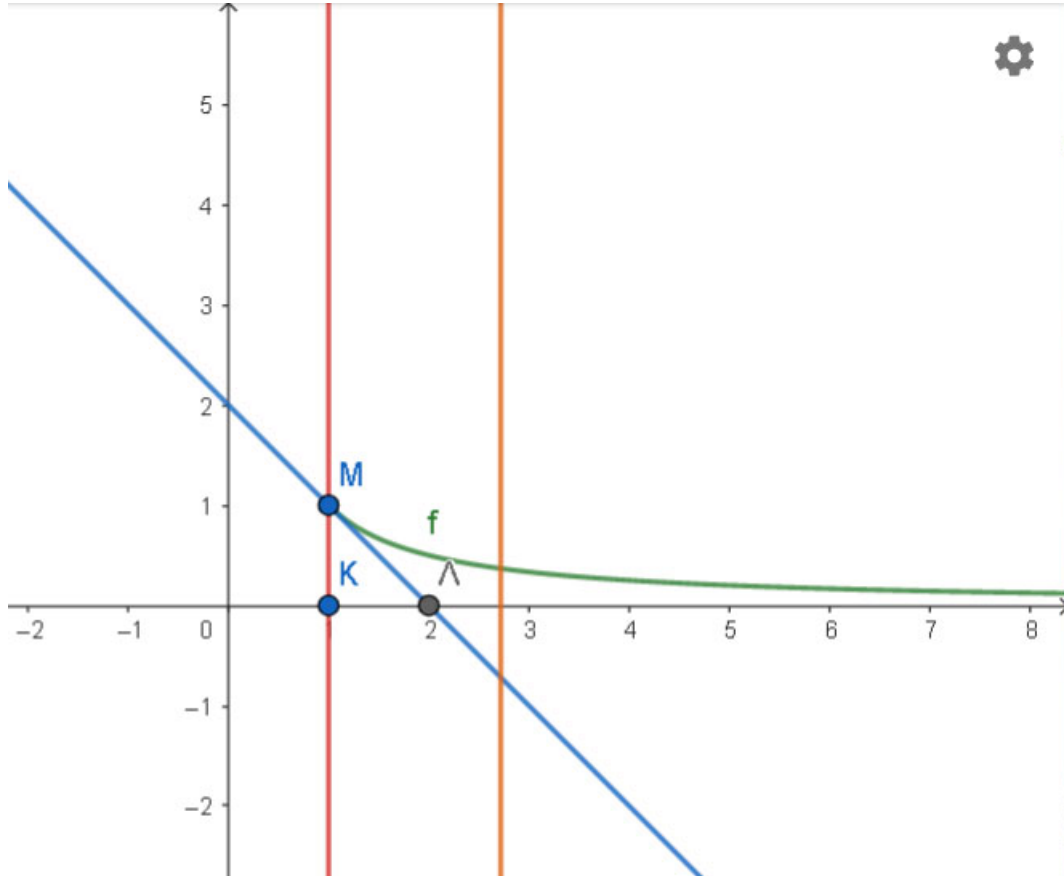
Το σύνολο τιμών της είναι

$$f(\mathbb{R}) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) = (0, +\infty)$$



Γ4.

1^{ος} τρόπος



$$E(\Omega) = \int_1^e f(x) dx - E_{\mu}(K\Lambda M) = \int_1^e \frac{1}{x} dx - \frac{(K\Lambda)(KM)}{2} = [\ln x]_1^e - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \tau\mu$$

2^{ος} τρόπος

$$E(\Omega) = \int_1^2 |f(x) - (-x + 2)| dx + \int_2^e f(x) dx =$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x - 2\right) dx + \int_2^e \frac{1}{x} dx = \left[\ln x + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 + [\ln x]_2^e = (\ln 2 + 2 - 4) - \left(0 + \frac{1}{2} - 2\right) + (1 - \ln 2) =$$

$$\ln 2 - 2 - \frac{1}{2} + 2 + 1 - \ln 2 = \frac{1}{2} \tau\mu$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Θέτω

$$g(x) = \frac{f(x) - 2x}{x-1} = \frac{\ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa - 2x}{x-1} \quad \text{με } x \in (0,1) \cup (1,2)$$

$$\text{με } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = l \quad \text{και} \quad \ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa - 2x = g(x)(x-1)$$

$$\text{Άρα με } \lim_{x \rightarrow 1} \left[\ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow 1} (g(x)(x-1))$$

$$\text{Δηλαδή } \ln 1 - 1 + \kappa - 2 = l \cdot 0$$

$$\text{Άρα } \kappa = 3$$

Δ2. Για $\kappa = 3$ έχουμε

$$f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3$$

$$\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη με } f'(x) = \frac{-1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2 + 2 - x}{x^2(2-x)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \text{ και } x_2 = 1$$

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ και f συνεχής στο $(0,1]$, άρα f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$

$f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1,2)$ και f συνεχής στο $[1,2)$, άρα f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2)$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (0,1)$, άρα

$$f((0,1)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) = (-\infty, 2)$$



Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [1,2)$

$$f([1,2)) = (\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), f(1)] = (-\infty, 2]$$

Άρα το $0 \in f(\Delta_1)$ και από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_1 \in (0,1)$: $f(x_1) = 0$ και είναι μοναδικό διότι σε αυτό το διάστημα η f είναι γνησίως αύξουσα και το $0 \in f(\Delta_2)$ και υπάρχει $x_2 \in (1, 2)$: $f(x_2) = 0$ και είναι μοναδικό διότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Άρα τελικά η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες

$$\text{Είναι } f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(2 - \frac{1}{3}\right) - 3 + 3 = \ln\frac{5}{3} > 0 \text{ αφού } \frac{5}{3} > 1$$

$$\text{Έστω } x_1 \geq \frac{1}{3} \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) \geq f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 0 \geq \ln\frac{5}{3} \text{ (άτοπο)}$$

$$\text{Άρα } x_1 < \frac{1}{3}$$

Δ3.

Εφαρμόζω Θεώρημα μέσης τιμής για την f στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$

Η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$

$$\text{άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον } \xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \quad f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} \stackrel{f(x_1)=0}{=} \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

και η f είναι γνησίως αύξουσα $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right)$, άρα το ξ είναι μοναδικό

Δ4. i

$$F'(x) = f(x)$$

$$G'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = G'(x) \Leftrightarrow F(x) = G(x) + c \quad (1)$$



Η ① για $x = x_1$: $F(x_1) = G(x_1) + c \Leftrightarrow G(x_1) = -c$

Η ① για $x = x_2$: $F(x_2) = G(x_2) + c \Leftrightarrow F(x_2) = c$

Επομένως $F(x_2) + G(x_1) = c - c = 0$

ii) $0 < x < x_1 \xrightarrow{f \downarrow} f(x) < f(x_1) \Leftrightarrow f(x) < 0$

$x_1 < x < 1 \xrightarrow{f \uparrow} f(x_1) < f(x) \Leftrightarrow f(x) > 0$

$1 < x < x_2 \xrightarrow{f \downarrow} f(x) > f(x_2) \Leftrightarrow f(x) > 0$

$x_2 < x < 2 \xrightarrow{f \downarrow} f(x) < f(x_2) \Leftrightarrow f(x) < 0$

	0	x_1	1	x_2	2			
$F' = f$		-	○	+	+	○	-	
F		↘		↗		↘		

όμως $x_2 > x_1 \xrightarrow{F \uparrow} F(x_2) > F(x_1) \Leftrightarrow c > 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x_1 \cdot F(x) + x_2 \cdot G(x) - x_1 - x_2 + 2x$, $x \in [x_1, x_2]$

- Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$
- $$\begin{aligned} h(x_1) &= x_1 \cdot F(x_1) + x_2 \cdot G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1, \\ &= x_2 \cdot G(x_1) + x_1 - x_2 \\ &= -x_2 \cdot c + x_1 - x_2 < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x_2) &= x_1 \cdot F(x_2) + x_2 \cdot G(x_2) - x_1 - x_2 + 2x_2, \\ &= x_1 \cdot F(x_2) + 0 + x_2 - x_1 \\ &= x_1 \cdot c + x_2 - x_1 > 0 \end{aligned}$$



Άρα $h(x_1) \cdot h(x_2) < 0$, οπότε από θεώρημα Bolzano ,

υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$

$$h'(x) = x_1 F'(x) + x_2 G'(x) + 2 = x_1 f(x) + x_2 f(x) + 2 = f(x)(x_1 + x_2) + 2$$

Άρα h' και x_0 μοναδικό.

Σχόλιο

Το Θέμα Α ήταν ξεκάθαρο μέσα από το σχολικό βιβλίο.

Το Θέμα Β στηριζόταν σε βασικές έννοιες των Μαθηματικών της ύλης της Γ' Λυκείου, χωρίς να έχει καμία ασάφεια.

Το Θέμα Γ ήταν πιο απαιτητικό από το Θέμα Β. Ήταν εμπλουτισμένο με αρκετές έννοιες των Μαθηματικών, ωστόσο μπορούσαν οι μαθητές να το αντιμετωπίσουν με μια ορθή αλληλουχία της σκέψης.

Το Θέμα Δ ήταν ένα σύνθετο θέμα που απαιτούσε πιο αυξημένες ικανότητες των μαθητών και μια πιο συνδυαστική σκέψη. Ήταν πιο περιεκτικό σε υπαρκτά θεωρήματα γεγονός που το καθιστά ανώτερου επιπέδου.