ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΣΑΒΒΑΤΟ 04/06/2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΟΜΑΔΑ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ «ΕΞΕΛΙΞΗ»

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 28-29

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 87

Α3. α. Λ

β. Σ

γ. Λ

Α4. α. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$

β. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

ΘΕΜΑ Β

Χ "απουσίες μαθητών"

5,10,15,20,25

Β1. $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} ti}{\nu} = \frac{5+10+15+20+25}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

Το εύρος $\mathbb{R} = x_{max} - x_{min} = 25 - 5 = 20$

Β2. $$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(ti-\bar{x})^2}{\nu} = \frac{(5-15)^2+(10-15)^2+(15-15)^2+(20-15)^2+(25-15)^2}{5}$$

$$= \frac{100+25+25+100}{5} = \frac{250}{5} = 50$$

Άρα $s^2 = 50$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΕΠΑ.Λ
Κεντρικό Διδακτήριο: Βασ. Αμαλίας 1 & Μιλτιάδου, Πλατεία ΗΣΑΠ Αμαρουσίου, 151 22 Μαρούσι
τηλ.-fax: 210 8028560, 210 6129412 • www.exelixi.edu.gr • info@ekpedefsi.gr

Β3. $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{50}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

Είναι $CV=\frac{s}{|\bar{x}|}=\frac{\sqrt{50}}{15}=\frac{5\sqrt{2}}{15}=\frac{\sqrt{2}}{3}\approx\frac{1,41}{3}\approx\frac{1}{2}>\frac{1}{10}$, άρα ανομοιογενές το δείγμα.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=x^3-9x^2+\alpha x+1,\qquad x,\alpha\in\mathbb{R}$$

$$Af=\mathbb{R}$$

Γ1. Αφού ο ρυθμός μεταβολής της f για x=1, είναι ίσος με 0, τότε $f'(1)=0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$f'(x)=(x^3-9x^2+\alpha x+1)'=3x^2-18x+9$

Αφού $f'(1)=0\Leftrightarrow 3\cdot1^2-181+\alpha=0\Leftrightarrow 3-18+\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=15$

Για α=15

$f(x)=x^3-9x^2+15x+1$ και $f'(x)=3x^2-18x+15$

Γ2. Είναι Μ(2,f(2)) το σημείο επαφής

οπότε

$f(2)=2^3-92^2+15\cdot2+1=8-9\cdot4+30+1=8-36+31=3$

και

$f'(2)=3\cdot2^2-18\cdot2+15=3\cdot4+36+15=-9$

Έστω (ζ):y=λx+β η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης

ευθεία της (f στο Μ(2,3))

τότε $\lambda=f'(2)=-9$ οπότε (ζ):y=−9x+β

Αφού Μ(2,3)∈(ζ), τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της, δηλαδή

$$3=-9\cdot2+\beta$$
$$\Leftrightarrow 3+18=\beta$$
$$\Leftrightarrow\beta=21$$

Άρα (ζ):y=−9x+21

Γ3. Είναι $f(x)=x^3-9x^2+15x+1,\quad x\in\mathbb{R}$

και $f'(x)=3x^2-18x+15$

- $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-18x+15=0$

$\Leftrightarrow 3(x^2-6x+5)=0$

$\Leftrightarrow 3\neq 0 \;,\; x^2-6x+5=0 \;\Leftrightarrow\; x_1=1$ ή $x_2=5$

- $f'(x)>0 \Leftrightarrow 3x^2-18x+15>0 \;\Leftrightarrow\; x\in(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$

x	-∞	1		5	+∞
$3x^2-18x+15$	+	0	-	0	+

Το πρόσημο της $f'(x)$, δίνει τη μονοτονία της f και φαίνεται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	-∞	1		5	+∞
f′	+	0	-	0	+
f	↗		↘		↗

- Αφού $f'(x)>0$ για $x\in(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$ τότε f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1],[5,+\infty)$
- Αφού $f'(x)<0$ για $x\in(1,5)$ τότε f γνησίως φθίνουσα στο $[1,5]$

Η f εμφανίζει τοπικό μέγιστο $x_1=1$, το $f(1)=8$

και εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2=15$, το $f(5)=-24$

Γ4. $f(x)=x^3-9x^2+15x+1,\;\; x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=3x^2-18x+15$

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{3x^2-18x+15}{x^2-1}$$

$\lim_{x\to1}\left(x^2-1\right)=0$

$\lim_{x\to1}\left(3x^2-18x+15\right)=0$

Με x "κοντά" στο $x_0=1$

$$\frac{f'(x)}{x^2-1}=\frac{3x^2-18x+15}{x^2-1}=\frac{(x-1)\cdot(3x-15)}{(x-1)\cdot(x+1)}$$

$$=\frac{3x-15}{x+1}$$

Σχήμα Horner με f=1, στο

$3x^2-18x+15=0$

$3x^2$	$-18x$	$+15=0$	1
↓	3	−15	
3	−15	0	

$3x^2-18x+15=$

$(x-1)\cdot(3x-15)$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΕΠΑ.Λ

Κεντρικό Διδακτήριο: Βασ. Αμαλίας 1 & Μιλτιάδου, Πλατεία ΗΣΑΠ Αμαρουσίου, 151 22 Μαρούσι

τηλ.-fax: 210 8028560, 210 6129412 • www.exelixi.edu.gr • info@ekpedefsi.gr

Άρα $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-15}{x+1}=\dfrac{3\cdot 1-15}{2}=-\dfrac{12}{2}=-6$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

Δ1. Για να ορίζεται η f, πρέπει και αρκεί $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$

Άρα $Af=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

Με $x\neq -1$, η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)'=\frac{(x)'\cdot(x+1)-x(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{1(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

Δ2. $\bar{x}=\dfrac{1}{f'(2)}$ εφόσον $f'(2)=\dfrac{1}{(2+1)^2}=\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{9}$

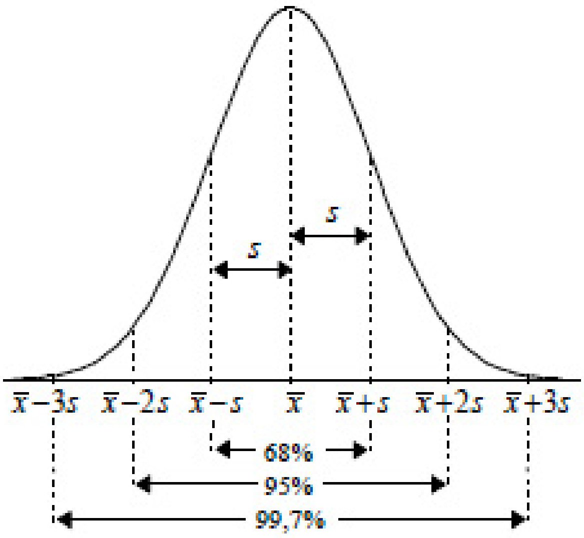
Είναι $\bar{x}=\dfrac{1}{\frac{1}{9}}=9$

και

$$s=\frac{1}{2f'(1)}=\frac{1}{\cancel{2}\frac{1}{\cancel{4}\,2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2,\ \text{αφού}\ f'(1)=\frac{1}{(1+1)^2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$$

Δ3. Έστω X "χρόνος επιστροφής σε λεπτά"

Τότε $X\sim N(9,2)$



αφού $\bar{x}-2s=5$ και $\bar{x}+2s=11$ στο διάστημα (5,11) θα βρίσκεται το 13,5% +68% των παρατηρήσεων.

Δηλαδή στο (5,11) βρίσκεται το 81,5% των μαθητών

Αφού ν=2.000, τότε $\nu_\zeta=\dfrac{81,5}{100}\cdot\nu$ δηλαδή

$$\nu_\zeta=\frac{81,5}{1\cancel{0}\cancel{0}}\cdot 2.0\cancel{0}\cancel{0}=1.630\ \text{μαθητές}$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΕΠΑ.Λ
Κεντρικό Διδακτήριο: Βασ. Αμαλίας 1 & Μιλτιάδου, Πλατεία ΗΣΑΠ Αμαρουσίου, 151 22 Μαρούσι
τηλ.-fax: 210 8028560, 210 6129412 • www.exelixi.edu.gr • info@ekpedefsi.gr

Αφού $\overline{x}+3s=15$ λεπτά, τότε πάνω από 15 λεπτά κάνει το 0,15% των μαθητών, επομένως

το ζητούμενο πλήθος είναι $\nu_\zeta=\frac{0,15}{1\cancel{0}\cancel{0}}\cdot 2.0\cancel{0}\cancel{0}=\frac{15}{10\cancel{0}}\cdot 2\cancel{0}=\frac{30}{10}=3$ μαθητές

Δ4. Αφού ο χρόνος επιστροφής των μαθητών της περιφέρειας αυξηθεί κατά 3 λεπτά, θα έχουμε νέες παρατηρήσεις της μορφής $y_i=x_i+3$, οπότε από βασική εφαρμογή σχολικού βιβλίου σελ 99 θα έχουμε

$\overline{y}=\overline{x}+3=12$ και $s_y=s_x=2$