

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ &
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡ/ΚΗΣ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΟΜΑΔΑ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ «ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ»

ΘΕΜΑ Α

- A1.** σελ. 186, σχολικό βιβλίο
A2. σελ. 142, σχολικό βιβλίο
A3. σελ. 161, σχολικό βιβλίο
A4. α) Σωστό
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Λάθος
ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\} = \{x \geq 0 \text{ και } \sqrt{x} \leq 1\} = \{x \geq 0 \text{ και } x \leq 1\} = [0, 1]$

Με $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^4} - 2\sqrt{x^2 + 1} = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

- B2.** Η $h(x) = (x-1)^2$, $x \in [0, 1]$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $h'(x) = 2(x-1) \cdot (x-1)' = 2(x-1) < 0$ διότι $x \in (0, 1)$. Άρα η $h(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$ και άρα $1 - 1$. Το σύνολο τιμών της $h(x)$ θα είναι το πεδίο ορισμού της h^{-1} .

$h([0, 1]) = [h(1), h(0)] = [0, 1]$

Για να βρω τον τύπο της αντίστροφης εργαζομαι ως εξής :

$y = (x-1)^2 \Leftrightarrow |x-1| = \sqrt{y} \stackrel{x \in [0,1]}{\Leftrightarrow} 1-x = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y}$



Άρα $h^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y}$, δηλαδή

$$h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, x \in [0,1]$$

B3. i) Η $\phi(x)$ είναι συνεχής στο $[0, 1)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\text{Για } x = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{(1 - x)(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x}{(1 - x)(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

Άρα η $\phi(x)$ είναι συνεχής στο 1 και τελικά είναι συνεχής στο $[0, 1]$

Ακόμα ισχύει ότι $\phi(1) = \frac{1}{2}$ και $\phi(0) = 1$ άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του

θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών με $\phi(0) \neq \phi(1)$

ii) Ισχύει $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ στο οποίο διάστημα η $\eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα άρα

$\eta\mu \frac{\pi}{6} < \eta\mu \alpha < \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu \alpha < 1$, άρα το $\eta\mu \alpha$ είναι ανάμεσα στα $\phi(0)$ και $\phi(1)$ και σύμφωνα

με θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\phi(x_0) = \eta\mu \alpha$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. ■ για $x < -1$:

$$\begin{aligned} f'(x) = -2 &\Rightarrow (f(x))' = (-2x)' \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x) = -2x + c_1, &\text{ από συνέπειες Θ.Μ.Τ.} \end{aligned}$$

■ για $x > -1$:

$$\begin{aligned} f'(x) = 3x^2 - 1 &\Rightarrow (f(x))' = (x^3 - x)' \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x) = x^3 - x + c_2, &\text{ από συνέπειες Θ.Μ.Τ.} \end{aligned}$$

f συνεχής \mathbb{R} άρα f συνεχής και στο $x_0 = -1$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-2x + c_1) = 2 + c_1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^3 - x + c_2) = -1 + 1 + c_2 = c_2$$

Επομένως $2 + c_1 = c_2$



$$\text{Επιπλέον } f(0) = 0 \Rightarrow 0 - 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\text{Άρα } c_1 = -2$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x < -1 \\ \alpha, & x = -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

$$\text{και } f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \alpha = 0$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Γ2. ■ για $x > -1$:

$$f'(x) = (x^3 - x)' = 3x^2 - 1$$

Η εξίσωση εφαπτομένης στο $A(x_0, f(x_0))$ είναι

$$(\varepsilon) : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Sigma(0, 2) \in (\varepsilon) \Rightarrow -2 - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (0 - x_0)$$

$$\Rightarrow -2 - (x_0^3 - x_0) = (3x_0^2 - 1) \cdot (-x_0)$$

$$\Rightarrow -2 - x_0^3 + x_0 = -3x_0^3 + x_0$$

$$\Rightarrow 3x_0^3 - x_0^3 - 2 = 0 \Rightarrow 2x_0^3 = 2$$

$$\Rightarrow x_0 = 1$$

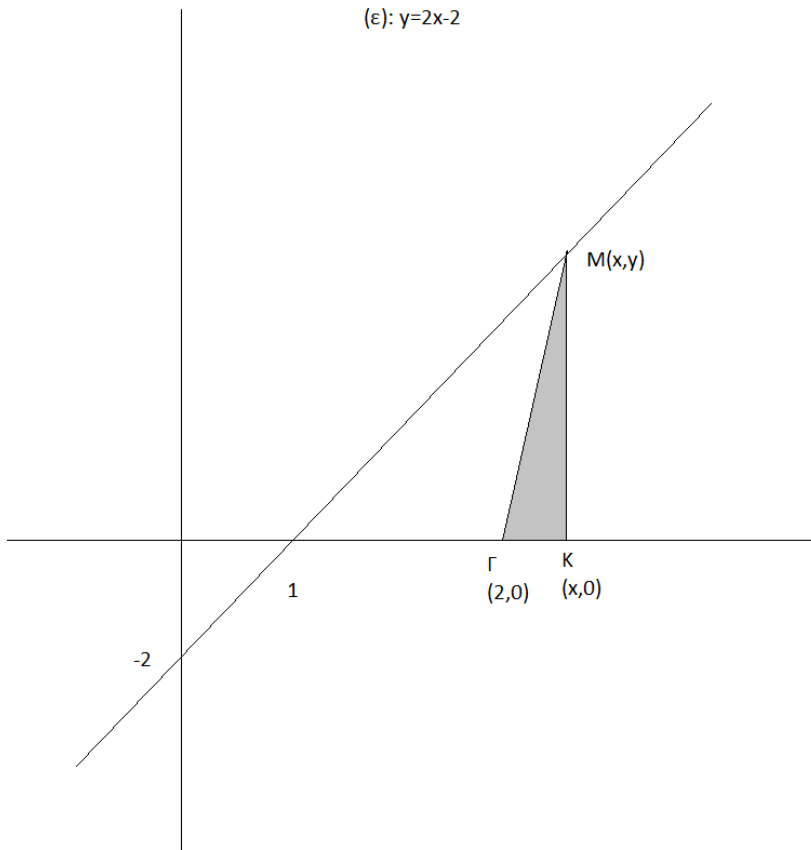
Τότε $(\varepsilon) : y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$$\Rightarrow y - 0 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2$$

www.ekpedefsi.gr



Γ3.



Στον τυχαίο χρόνο t

$$E(t) = \frac{1}{2}(ΚΓ) \cdot (ΜΚ) = \frac{1}{2}|x(t) - 2| \cdot y(t) \stackrel{x(t) > 2}{=} \frac{1}{2}(x(t) - 2) \cdot (2x(t) - 2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x(t) - 2) \cdot (x(t) - 1)$$

$$= (x(t) - 2) \cdot (x(t) - 1)$$

$$E'(t) = x'(t) \cdot (x(t) - 1) + (x(t) - 2) \cdot x'(t) =$$

$$E'(t) = x'(t) \cdot (x(t) - 1 + x(t) - 2)$$

$$= x'(t) \cdot (2x(t) - 3)$$

$$\text{Την } t = t_0 : E'(t_0) = x'(t_0) \cdot (2x(t_0) - 3)$$

$$= 2 \cdot (2 \cdot 3 - 3) = 2 \cdot 3 = 6 \text{ μον/sec}$$



Γ4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right] = \ell$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 2) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty \end{aligned}$$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \stackrel{u=f(x)}{x \rightarrow +\infty} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu u}{u} = 0,$

αφού για $x > 0$: $\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$$

Άρα από ΚΠ είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3} \stackrel{u=-x}{x \rightarrow +\infty} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{1-(-u)^3} =$

$$= \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{1+u^3} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3 - u}{u^3 + 1} =$$

$$= \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3}{u^3} = 1$$

άρα $\ell = 0 + 1 = 1$

www.ekpedefsi.gr

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) Η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(3x), x > 0$ είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{3x} \cdot 3 = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
f'(x)		-	+
f(x)		○ Θ.Ε.	↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$ και αφού είναι συνεχής στο $(0,1]$, η f θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$ και αφού είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει στο $x=1$ ολικό ελάχιστο το $f(1) = 1 - \ln 3$.

Είναι: $A_1 = (0,1]$ και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής, τότε:

$$f(A_1) = [f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x))$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln(3x)) = +\infty$$

$$f(A_1) = [1 - \ln 3, +\infty) \quad (e < 3 \Leftrightarrow \ln e < \ln 3 \Leftrightarrow 1 < \ln 3 \Leftrightarrow 1 - \ln 3 < 0)$$

$0 \in f(A_1)$ άρα από Θ.Ε.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in A_1$ (και $x_1 \neq 1$ αφού $f(1) = 1 - \ln 3 \neq 0$) τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$ και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1 , το x_1 είναι μοναδικό.

Είναι $A_2 = (1, +\infty)$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, τότε:

$$f(A_2) = (\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x))$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(3x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln(3x)}{x}\right) = +\infty \text{ αφού}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x)}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x} = 0$$

$$\text{Επομένως } f(A_2) = (1 - \ln 3, +\infty)$$

$0 \in f(A_2)$ άρα από Θ.Ε.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in A_2$ ($x_2 > 1$) τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_2 , το x_2 είναι μοναδικό.

ii) $f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} > 0$ και αφού f συνεχής στο $(0,+\infty)$, η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$



Δ2. Είναι $E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και x_1, x_2 είναι διαδοχικές ρίζες της, η f διατηρεί το πρόσημο της στο $[x_1, x_2]$ και αφού $f(1) = 1 - \ln 3 < 0 \Rightarrow f(x) < 0, x \in [x_1, x_2]$.

Επομένως

$$\begin{aligned} E &= \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx = - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = - \int_{x_1}^{x_2} (x)' f(x) dx = - [x f(x)]_{x_1}^{x_2} + \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} x f'(x) dx = -x_2 f(x_2) + x_1 f(x_1) \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} x \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = \int_{x_1}^{x_2} (x-1) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{x_1}^{x_2} = \\ &= \frac{1}{2} (x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) \end{aligned}$$

Δ3. Από Δ2 είναι $E > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, επομένως και $x_1 + x_2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x_2 > 2 - x_1$ (1)

Είναι $0 < x_1 < 1 \Leftrightarrow -1 < -x_1 < 0 \Leftrightarrow 2 - 1 < 2 - x_1 < 2 \Leftrightarrow 1 < 2 - x_1 < 2$

$x_2, 2 - x_1 \in (1, 2)$ όπου η f είναι γνησίως αύξουσα, και από (1):

$$f(x_2) > f(2 - x_1) \Leftrightarrow 0 > f(2 - x_1)$$

Δ4. Επειδή η f είναι κυρτή, η γραφική παράσταση της f θα είναι πάνω από την εφαπτόμενη σε οποιοδήποτε σημείο, με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Η εφαπτόμενη της f στο x_2 είναι: $y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2)$ και $f(x) \geq y$ (2) με το $=$ να ισχύει μόνο για $x = x_2$.

Επίσης η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$, επομένως $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 1 - \ln 3$ με το $=$ να ισχύει μόνο για $x=1$.

Η δοθείσα εξίσωση γράφεται στην μορφή: $f(x) - y = f(1) - f(x)$.

Το πρώτο μέλος είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός με το $"="$ να ισχύει για $x = x_2$ και το δεύτερο μέλος μικρότερο ή ίσο του μηδενός με το $"="$ να ισχύει μόνο για $x=1$.

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη (αφού $x_2 \neq 1$).

Σχόλιο

- Το θέμα Α ήταν θεωρία από το σχολικό βιβλίο χωρίς να υπάρχουν ασάφειες.
- Το θέμα Β εξέταζε βασικές γνώσεις τις ύλης της Γ' Λυκείου, ωστόσο καλούσε τους μαθητές να δώσουν απαντήσεις με πολλές λεπτομέρειες και αιτιολογήσεις.
- Το θέμα Γ αποτελούνταν από ερωτήματα που περιέχονται στο σχολικό βιβλίο όμως οι μαθητές θα έπρεπε να έχουν πολύ καλή γνώση της θεωρίας και των ορισμών για να αποδώσουν τις ακριβείς απαντήσεις. Παράλληλα απαιτούνταν γνώσεις ύλης από προηγούμενες τάξεις.
- Το θέμα Δ ήταν ένα απαιτητικό θέμα. Οι μαθητές έπρεπε να είναι πολύ καλά προετοιμασμένοι και να έχουν δουλέψει θέματα με αλληλένδετα ερωτήματα. Καθιστούσε αναγκαία την ευχέρεια των μαθητών με τις μεταβλητές και όχι τόσο με τους αριθμούς. Επιπλέον έπρεπε οι μαθητές να διακρίνονται από παρατηρητικότητα και συνδυαστική σκέψη.